Vorlesung 3a

Der Erwartungswert

von diskreten reellwertigen Zufallsvariablen

Teil 3

Linearität des Erwartungswertes

(vgl. (Buch S. 52)

Satz 1. (Homogenität des EW)

Der Erwartungswert des c-fachen

einer diskreten reellwertigen Zufallsvariablen X

ist das c-fache des Erwartungswertes:

$$\mathbf{E}[cX] = c\mathbf{E}[X]$$

Satz 1. (Homogenität des EW)

Der Erwartungswert des c-fachen

einer diskreten reellwertigen Zufallsvariablen X

ist das c-fache des Erwartungswertes:

$$h(a) := ca, \quad Y := h(X) = cX.$$

$$\mathbf{E}[cX] = \mathbf{E}[h(X)] = \sum_{a \in S} h(a)\mathbf{P}(X = a)$$

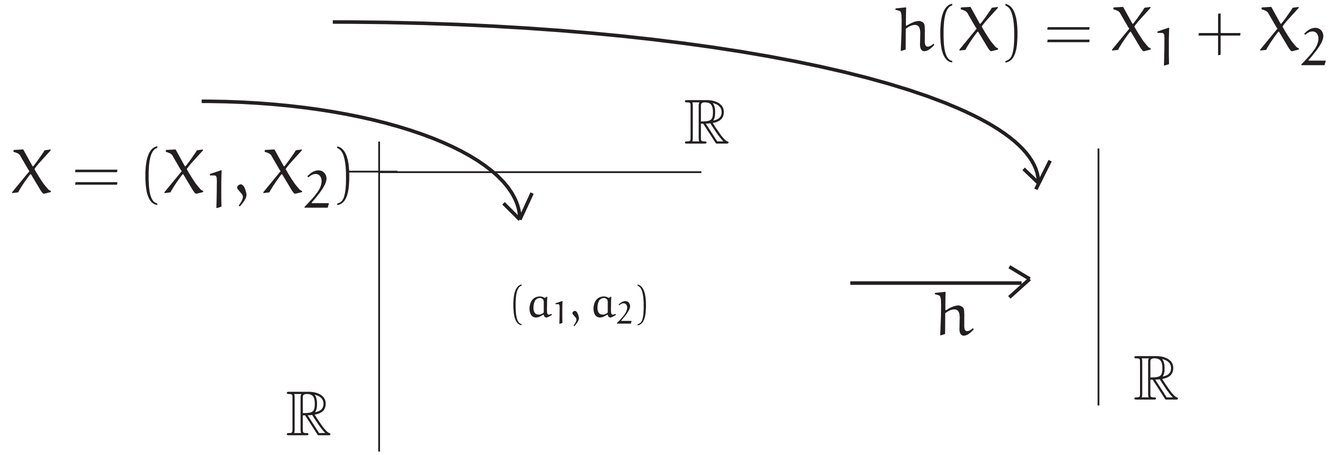
$$= \sum_{a \in S} ca\ \mathbf{P}(X = a) = c \sum_{a \in S} a\,\mathbf{P}(X = a) = c\mathbf{E}[X].$$

Satz 2. (Additivität des Erwartungswertes)

Sei (X_1, X_2) ein zufälliges Paar reellwertiger ZV'er, für die $\mathbf{E}[X_1]$ und $\mathbf{E}[X_2]$ existieren und endlich sind.

Dann gilt

$$\mathbf{E}[X_1 + X_2] = \mathbf{E}[X_1] + \mathbf{E}[X_2]$$



$$h(a_1, a_2) = a_1 + a_2$$

Beweis von Satz 2

(hier nur für **diskrete** Zufallsvariable):

Seien $S_1, S_2 \subset \mathbb{R}$ abzählbar mit

$\mathbf{P}(X_1 \in S_1) = \mathbf{P}(X_2 \in S_2) = 1.$

Aus der Transformationsformel folgt mit

$h(a_1, a_2) := a_1 + a_2$:

$$\mathbf{E}[X_1 + X_2] = \sum_{(a_1,a_2)\in S_1\times S_2} (a_1 + a_2)\, \mathbf{P}(X_1 = a_1, X_2 = a_2)$$

In der nächsten Umformung werden wir

die in V2b1 besprochene Beziehung

$$\sum_{a_2 \in S_2} \mathbf{P}(X_1 = a_1, X_2 = a_2) = \mathbf{P}(X_1 \in a_1)$$

verwenden.

$$\mathbf{E}[X_1 + X_2]$$

$$= \sum_{a_1 \in S_1} \sum_{a_2 \in S_2} (a_1 + a_2)\, \mathbf{P}(X_1 = a_1, X_2 = a_2)$$

$$= \sum_{a_1 \in S_1} a_1 \sum_{a_2 \in S_2} \mathbf{P}(X_1 = a_1, X_2 = a_2)$$

$$+ \sum_{a_2 \in S_2} a_2 \sum_{a_1 \in S_1} \mathbf{P}(X_1 = a_1, X_2 = a_2)$$

$$\mathbf{E}[X_1 + X_2]$$

$$= \sum_{a_1 \in S_1} \sum_{a_2 \in S_2} (a_1 + a_2)\, \mathbf{P}(X_1 = a_1, X_2 = a_2)$$

$$= \sum_{a_1 \in S_1} a_1 \quad \mathbf{P}(X_1 = a_1)$$

$$+ \sum_{a_2 \in S_2} a_2 \sum_{a_1 \in S_1} \mathbf{P}(X_1 = a_1, X_2 = a_2)$$

$$\mathbf{E}[X_1 + X_2]$$

$$= \sum_{a_1 \in S_1} \sum_{a_2 \in S_2} (a_1 + a_2)\, \mathbf{P}(X_1 = a_1, X_2 = a_2)$$

$$= \sum_{a_1 \in S_1} a_1 \quad \mathbf{P}(X_1 = a_1)$$

$$+ \sum_{a_2 \in S_2} a_2 \sum_{a_1 \in S_1} \mathbf{P}(X_1 = a_1, X_2 = a_2)$$

$$\mathbf{E}[X_1 + X_2]$$

$$= \sum_{a_1 \in S_1} \sum_{a_2 \in S_2} (a_1 + a_2)\, \mathbf{P}(X_1 = a_1, X_2 = a_2)$$

$$= \mathbf{E}[X_1]$$

$$+ \sum_{a_2 \in S_2} a_2 \sum_{a_1 \in S_1} \mathbf{P}(X_1 = a_1, X_2 = a_2)$$

$$\mathbf{E}[X_1 + X_2]$$

$$= \sum_{a_1 \in S_1} \sum_{a_2 \in S_2} (a_1 + a_2)\, \mathbf{P}(X_1 = a_1, X_2 = a_2)$$

$$= \mathbf{E}[X_1]$$

$$+ \mathbf{E}[X_2]$$

$$\square$$

Korollar aus Satz 1 und Satz 2

(**Linearität des Erwartungswertes**)

(Buch S. 52)

Für reellwertige Zufallsvariable X_1, X_2

für die $\mathbf{E}[X_1]$ und $\mathbf{E}[X_2]$ existieren und endlich sind,

gilt

$$\mathbf{E}[c_1 X_1 + c_2 X_2] = c_1 \mathbf{E}[X_1] + c_2 \mathbf{E}[X_2]\,, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}\,.$$